EXERCICE N°1 — 7 points — PRINCIPALE 2016

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y=-x$.

2°) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3°) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4°) Soit $x>0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarque que $\sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1°) Donner une valeur approchée à 10^{-3} prés de u_3.

2°) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k\in IN^*$, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $u_n\le 1-\frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel $\mathscr{L}$ et que $0,7<\mathscr{L}\le 1$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$.

b) On note P le plan (OBC).

En remarquant que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\,\overrightarrow{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

2°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$.

Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

3°) a) Calculer la distance OA.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

4°) On considère le point $H(1,-1,0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle $\mathscr{C}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com